

Kapitel 11

Aus Fahrstrategien hergeleitete Fahrzeugfolgemodelle

Ideen sind wie Kinder: Die eigenen liebt man am meisten.
Lothar Schmidt

Zusammenfassung Die in diesem Kapitel vorgestellten Modelle leiten sich aus gewissen Annahmen über das reale Fahrverhalten her: Einhalten eines Wunschabstandes, Erreichen einer Wunschgeschwindigkeit oder Nichtüberschreiten komfortabler Werte für Beschleunigungen und Bremsverzögerungen. Außerdem werden Aspekte der Kinematik wie die quadratische Abhängigkeit des Bremsweges von der Geschwindigkeit berücksichtigt. Als Beispiele dienen eine vereinfachte Version des Gipps-Modells sowie das Intelligent-Driver-Modell. Im Idealfall erzeugen diese Modelle ein Fahrverhalten wie ein adaptiver Beschleunigungsregler (*Adaptive Cruise Control*, ACC). Sie haben auch dieselben Eingangsvariablen. Spezifisch menschliche Eigenschaften wie Fahrfehler, Reaktionszeit oder Multiantizipation werden im nächsten Kapitel betrachtet.

11.1 Modellkriterien

Die hier vorgestellten Modelle haben dieselbe mathematische Form wie die Minimalmodelle (vgl. Kap. 10). Sie werden durch eine Beschleunigungsfunktion a_{mic} (Gl. (10.3)) oder eine Geschwindigkeitsfunktion v_{mic} (Gl. (10.6)) beschrieben. Die Beschleunigungsfunktion sollte mindestens folgende Aspekte modellieren:

1. Beschleunigung auf die *Wunschgeschwindigkeit* v_0 , falls es keine Behinderungen durch andere Fahrzeuge gibt und auch andere Hindernisse hinreichend weit entfernt sind:

$$\frac{\partial a_{\text{mic}}(s, v, v_l)}{\partial v} < 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} a_{\text{mic}}(s, v_0, v_l) = 0 \quad \text{für alle } v_l. \quad (11.1)$$

2. Im gebundenen Verkehr sollte bei sonst gleichen Bedingungen die Beschleunigung abnehmen (bzw. die Bremsverzögerung zunehmen), je geringer der Abstand zum Vorderfahrzeug ist:

$$\frac{\partial a_{\text{mic}}(s, v, v_l)}{\partial s} \geq 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial a_{\text{mic}}(s, v, v_l)}{\partial s} = 0 \quad \text{für alle } v_l. \quad (11.2)$$

Das Gleichheitszeichen der linken Ungleichung ist gültig, wenn andere Fahrzeuge so weit entfernt sind, dass sie das Fahrverhalten nicht beeinflussen.

- Bei dynamischen Annäherungen sollte die Beschleunigung umso geringer (bzw. die Verzögerung umso stärker) sein, je höher bei sonst gleichen Bedingungen die Annäherungsrate an das Vorderfahrzeug ist bzw. je schneller dieses fährt:

$$\frac{\partial \tilde{a}_{\text{mic}}(s, v, \Delta v)}{\partial \Delta v} \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial a_{\text{mic}}(s, v, v_l)}{\partial v_l} \geq 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial a_{\text{mic}}(s, v, v_l)}{\partial v_l} = 0. \quad (11.3)$$

Wieder gilt das Gleichheitszeichen für den Fall, dass keine Behinderungen auftreten.

- In einer Warteschlange sollte ein gewisser Mindestabstand s_0 zum Vorderfahrzeug gewahrt werden:

$$a_{\text{mic}}(s, 0, v_l) = 0 \quad \text{für alle } v_l \geq 0, s \leq s_0. \quad (11.4)$$

Die Bedingungen an die Geschwindigkeitsfunktion v_{mic} ergeben sich aus jenen für die Beschleunigungsfunktion durch die aus Gl. (10.10) gewonnene Beziehung $v_{\text{mic}} = v + a_{\text{mic}} \Delta t$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, ist ein Fahrzeugfolgmodell *vollständig* in dem Sinne, dass prinzipiell alle in der Längsdynamik auftretenden Situationen konsistent modelliert werden können. Insbesondere folgt daraus (i) die endliche Reichweite aller Wechselwirkungen, (ii) das Fehlen eines *Mitzieheffekts*,

$$a_{\text{mic}}(s, v, v_l) \leq a_{\text{mic}}(\infty, v, 0) \quad \text{für alle } v_l \quad (11.5)$$

und (iii) die Existenz einer Gleichgewichtsgeschwindigkeit¹ $v_e(s)$, welche die bereits für die OV-Funktion in Gl. (10.17) geforderten Bedingungen erfüllt (vgl. Übungsaufgabe 11.1):

$$v_e'(s) \geq 0, \quad v_e(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} v_e(s) = v_0. \quad (11.6)$$

Diese Konsistenzbedingungen sind notwendig, jedoch nicht hinreichend. Beispielsweise muss zusätzlich die Beschleunigung auf als komfortabel empfundene bzw. physikalisch mögliche Werte eingegrenzt werden. Bei dynamischen Annäherungen müssen kinematische Tatsachen wie die quadratische Abhängigkeit des Bremsweges von der Geschwindigkeit berücksichtigt werden und ggf. vorausschauend Bremsmanöver eingeleitet werden. Schließlich sollte das Modell zwar Instabilitäten und damit die Ausbildung von Stop-and-Go-Verkehr zulassen, jedoch keine Unfälle.²

¹ Schwächt man Bedingung (11.1) auf $\partial a_{\text{mic}}/\partial v \leq 0$ ab, sind auch Modelle *ohne* Fundamentaldiagramm möglich, die gelegentlich postuliert werden.

² Verkehrsflussmodelle stellen die normalen Verhältnisse dar. Unfälle sind fast immer durch grobe Fahrfehler verursacht, die gerade nicht dem zu modellierenden Verhalten entsprechen, so dass sie außerhalb des Beschreibungsbereiches der hier behandelten Modelle liegen.

Welche der im Kapitel 10 vorgestellten Modelle erfüllen die Konsistenzbedingungen (11.1) bis (11.4)?

11.2 Gipps-Modell

Die hier vorgestellte Version des Gipps-Modells ist gegenüber der Formulierung in der Originalarbeit vereinfacht, aber nicht konzeptionell geändert. Es ist vermutlich das einfachstmögliche, vollständige sowie unfallfreie Modell mit realistischen Werten der Beschleunigung (wenngleich auch nicht realistischem Beschleunigungsverhalten).

11.2.1 Sichere Geschwindigkeit

Die Bedingung der Unfallfreiheit ist mittels einer maximalen, von Abstand und Geschwindigkeit des Führungsfahrzeugs abhängigen „sicheren Geschwindigkeit“ $v_{\text{safe}}(s, v_l)$ formuliert. Diese wird aus folgenden Annahmen hergeleitet:

1. Es wird mit einer konstanten Verzögerung b gebremst. Eine Unterscheidung zwischen komfortabler und maximaler Verzögerung gibt es nicht.
2. Es gibt eine konstante „Reaktionszeit“ Δt .
3. Es wird der *Worst Case* betrachtet: Der Fahrer des Führungsfahrzeugs bremst unvermittelt und bis zum Stillstand. Unter dieser Bedingung soll Kollisionsfreiheit herrschen. Um ein Berühren „Stoßstange-an-Stoßstange“ zu vermeiden, sollte ein Minimalabstand s_0 nicht unterschritten werden.³

Unter den Bedingungen 1 und 3 beträgt der Bremsweg des Führungsfahrzeugs

$$\Delta x_l = \frac{v_l^2}{2b}.$$

Beim betrachteten Fahrzeug muss neben dem Bremsweg auch der während der Reaktionszeit zurückgelegte „Reaktionsweg“ berücksichtigt werden (Bedingung 2). Der resultierende *Anhalteweg* (Summe aus Reaktions- und Bremsweg) ist gegeben durch⁴

$$\Delta x = v\Delta t + \frac{v^2}{2b}.$$

³ Diese in der Originalarbeit nicht enthaltene Bedingung ist notwendig, um Unfallfreiheit auch bei Diskretisierungsfehlern zu gewährleisten.

⁴ Hier ist, im Gegensatz zur Formulierung in der Originalarbeit, nicht berücksichtigt, dass sich während der Reaktionszeit die Geschwindigkeit ändern kann.

Das Fahrzeug kommt kollisionsfrei mit einem Mindestabstand s_0 zum Stehen, falls der anfängliche Abstand s größer ist als s_0 zuzüglich der Differenz zwischen dem eigenen Anhalteweg und dem Bremsweg des Führungsfahrzeugs,

$$s - s_0 \geq v\Delta t + \frac{v^2}{2b} - \frac{v_l^2}{2b}.$$

Für die gerade noch sichere Geschwindigkeit $v = v_{\text{safe}}$ gilt das Gleichheitszeichen. Lösen der resultierenden quadratischen Gleichung ergibt

$$v_{\text{safe}}(s, v_l) = -b\Delta t + \sqrt{b^2\Delta t^2 + v_l^2 + 2b(s - s_0)}. \quad (11.7)$$

11.2.2 Modellgleichung

Die „sichere Geschwindigkeit“ (11.7) ist die wesentliche Komponente des als iterierte Abbildung formulierten, vereinfachten Gipps-Modells :

$$v(t + \Delta t) = \min[v + a\Delta t, v_0, v_{\text{safe}}(s, v_l)] \quad \text{Gipps-Modell.} \quad (11.8)$$

Diese Aktualisierungsgleichung spiegelt folgendes Fahrverhalten wider:

- Falls die aktuelle Geschwindigkeit oberhalb der sicheren Geschwindigkeit liegt, wird auf diese im nächsten Schritt abgebremst.⁵ Der Aktualisierungszeitschritt wird dabei gleich der Reaktionszeit gewählt.
- Ansonsten wird mit einem konstanten Wert a beschleunigt, bis entweder die sichere Geschwindigkeit oder die Wunschgeschwindigkeit v_0 erreicht ist.

11.2.3 Fließgleichgewicht

Im Fließgleichgewicht gilt $v(t + \Delta t) = v_l = v$ und damit

$$v = \min(v_0, v_{\text{safe}}) = \min\left(v_0, -b\Delta t + \sqrt{b^2\Delta t^2 + v^2 + 2b(s - s_0)}\right).$$

Dies führt zur Gleichgewichts-Geschwindigkeitsfunktion

$$v_e(s) = \max\left[0, \min\left(v_0, \frac{s - s_0}{\Delta t}\right)\right] \quad (11.9)$$

⁵ Dabei ist die Bremsverzögerung $(v - v_{\text{safe}})/\Delta t$ nicht auf b begrenzt. Sie kann, beispielsweise nach Einscheren eines anderen Fahrzeuges (passiver Spurwechsel), auch deutlich höher sein. Ohne Spurwechsel kann eine solche Situation nicht auftreten.

und mit der Fahrzeuglänge l zum bereits bekannten „dreieckigen“ Fundamentaldiagramm

$$Q_e(\rho) = \min \left(v_0 \rho, \frac{1 - \rho(l + s_0)}{\Delta t} \right). \quad (11.10)$$

Daraus folgt, dass der Parameter Δt wie im Newell-Modell vierfach interpretiert werden kann: (i) als Reaktionszeit gemäß der Herleitung von v_{safe} , (ii) als numerische Aktualisierungszeit oder (iii) als Geschwindigkeitsanpassungszeit jeweils nach Gl. (11.8) und schließlich (iv) als Folgezeit im gebundenen Verkehr nach dem Fundamentaldiagramm (11.9).

Tabelle 11.1 Modellparameter des vereinfachten Gipps-Modells.

Parameter	Typ. Wert Autobahn	Typ. Wert Stadtverkehr
Wunschgeschwindigkeit v_0	120 km/h	54 km/h
Anpassungs-/Reaktionszeit Δt	1.1 s	1.1 s
Beschleunigung a	1.5 m/s ²	1.5 m/s ²
Verzögerung b	1.0 m/s ²	1.0 m/s ²
Minimalabstand s_0	3 m	2 m

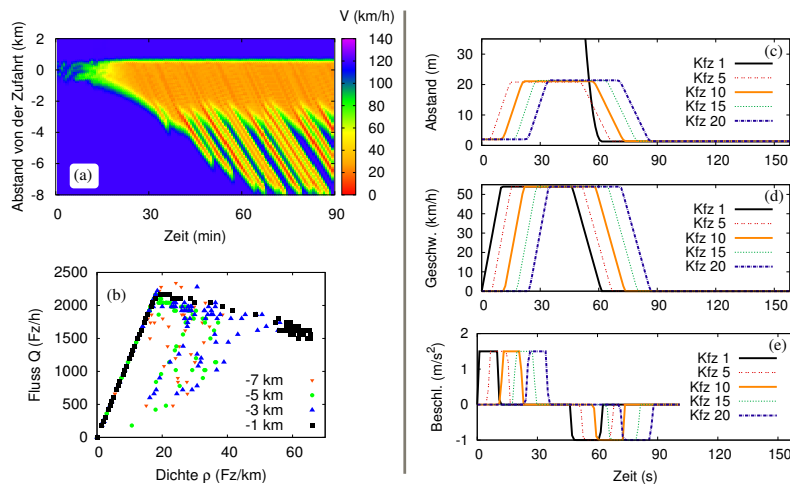


Abb. 11.1 Simulation der beiden Standardszenarien „Autobahn“ (links) und „Stadtverkehr“ (rechts) mit dem Gipps-Modell (Gln. (11.8) und (11.7)) unter Verwendung der Parameter aus Tabelle 11.1.

11.2.4 Eigenschaften

Im Gegensatz zu den im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Minimalmodellen hat das Gipps-Modell eine nachvollziehbare Herleitung aus wenigen Grundannahmen und anschauliche Parameter, die auch die richtige Größenordnung besitzen (Tabelle 11.1). Ferner ist das Modell – anders als die Minimalmodelle – *robust* in dem Sinne, dass es in einem weiten Parameterbereich mit sinnvollen Ergebnissen simuliert werden kann.

Das simulierte Autobahn-Szenario (Abb. 11.1 links) stellt eine deutlich realitätsnähere Dynamik als das OVM oder das Newell-Modell dar: Das Geschwindigkeitsfeld, Teilbild (a), zeigt kleine Störungen, die durch Spurwechsel bei der Einfahrt entstehen und im Verlauf ihrer Ausbreitung entgegen der Fahrtrichtung zu Stop-and-Go-Wellen anwachsen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist konstant und von der Größenordnung (etwa -15 km/h) in Einklang mit den Beobachtungen. Ferner weicht die Wellenlänge (etwa $1-1.5$ km) nicht zu stark von den Beobachtungen (etwa $1.5-3$ km) ab.

Das aus den virtuellen Detektoren erzeugte Fluss-Dichte-Diagramm, Teilbild (b), weist im gebundenen Verkehr die im realen Verkehr beobachtete weite Streuung auf (vgl. hierzu Abb. 4.11 und 4.12). Betrachtet man die Punktwolken verschiedener virtueller Detektoren, beobachtet man eine deutliche Verschiebung des Schwerpunktes der Punktwolken in Richtung höherer Dichte und in Richtung des Fundamentaldiagramms, je näher der virtuelle Detektor an der stauverursachenden Engstelle liegt. Nur im Bereich des stationären Verkehrsflusses (gefüllte Quadrat-symbole in Teilbild (b)) liegen die Daten nahezu auf dem Fundamentaldiagramm des Gipps-Modells (obere Begrenzung der Daten). Diese offensichtliche Dichteerhöhung nahe des Stau-Ausflusses wird häufig in realen Daten beobachtet und als *Pinch-Effekt* (engl. *to pinch*: einzwängen) bezeichnet. Die mit der Schwankungsbreite zunehmende systematische Unterschätzung der Dichte legt jedoch nahe, dass die tatsächliche Dichtezunahme geringer ist oder gar nicht stattfindet. Dies wird durch die Simulation bestätigt. Daraus folgt eine wichtige Aussage:

Um dynamische Phänomene des Verkehrsflusses zu verstehen, muss man nicht nur die Verkehrsdynamik, sondern auch die Datenerfassung und -auswertung simulieren. Das gilt auch umgekehrt, wenn man die Leistungsfähigkeit und Aussagekraft von Modellen anhand von realen Verkehrsdaten bestimmen will.

Das städtische LSA-Szenario ist deutlich näher an der Wirklichkeit als bei den bisher betrachteten Modellen. Allerdings ist der Beschleunigungsverlauf unrealistisch. Zwar liegen die durch die Parameter a und b einstellbaren Werte von Beschleunigung und Verzögerung im realistischen Bereich. Es gibt aber, wie im Teilbild (e) veranschaulicht, für sämtliche Fahrsituationen nur drei mögliche Beschleunigungen: $\dot{v} = a, b$, oder Null. Das Fahrverhalten ist also übertrieben schematisch und die „roboterhaft“ abrupten Übergänge sind unrealistisch.

Das Gipps-Modell unterscheidet nicht zwischen komfortabler und maximal möglicher Verzögerung. Interpretiert man den Parameter b in Formel (11.7) für die sichere Geschwindigkeit als maximale Verzögerung, ist das Modell immer unfallfrei, aber es wird immer maximal, d.h. *sehr* unkomfortabel verzögert. Interpretiert man b hingegen als komfortable Verzögerung, kann das Modell bei heterogenem Verkehr doch wieder Unfälle produzieren, wenn (mit anderen Modellen oder Parametern simulierte) Vorderfahrzeuge stärker bremsen.

In Anbetracht seiner Einfachheit zeigt das Gipps-Modell gute Ergebnisse. Es wird in abgewandelter Form in vielen Simulatoren eingesetzt.

11.3 Intelligent-Driver-Modell

Das zeitkontinuierliche *Intelligent-Driver-Model* (IDM) ist vermutlich das einfachste, vollständige und unfallfreie Modell, welches in allen Verkehrssituationen realistische Beschleunigungswerte und ein zumindest plausibles Beschleunigungsverhalten modelliert.

11.3.1 Geforderte Eigenschaften

Als ein typischer Vertreter eines aus Grundannahmen hergeleiteten Modells (*First-Principles-Modells*) ist das IDM im Wesentlichen durch folgende Liste von zu modellierenden Eigenschaften bestimmt:

1. Die Beschleunigung gehorcht den allgemeinen Plausibilitätsbedingungen (11.1) bis (11.4).
2. Der Gleichgewichtsabstand bei der Folgefahrt sollte einen durch einen Mindestabstand s_0 und eine Zeitlücke T definierten „Sicherheitsabstand“ $s_0 + vT$ nicht unterschreiten.
3. Die Annäherung an langsame oder stehende Fahrzeuge bzw. Hindernisse geschieht mit einer kollisionsvermeidenden *intelligenten Bremsstrategie*:
 - Ist die Situation „unter Kontrolle“, wird „weich“ gebremst, wobei eine gewisse komfortable Verzögerung allmählich aufgebaut und kurz vor dem Stillstand wieder abgebaut wird.
 - Ist die Situation kritisch, wird stärker als mit der komfortablen Verzögerung gebremst und so die Situation wieder unter Kontrolle gebracht. Danach wird ggf. mit der komfortablen Verzögerung weiter abgebremst.
4. Bei der Folgefahrt und beim Annähern sollte es sanfte Übergänge geben. Der als Zeitableitung der Beschleunigung definierte *Ruck* J (engl. *Jerk*) sollte daher

endlich bleiben.⁶ Dies entspricht einer nach allen Variablen stetig differenzierbaren Beschleunigungsfunktion $a_{\text{mic}}(s, v, v_l)$ bzw. $\tilde{a}_{\text{mic}}(s, v, \Delta v)$.

- Das Modell sollte möglichst einfach sein und anschauliche Modellparameter besitzen. Jeder Parameter sollte möglichst nur einen Aspekt des Fahrverhaltens beschreiben und plausible Werte annehmen.

11.3.2 Modellgleichung und mathematische Beschreibung

Die geforderten Eigenschaften werden durch folgende Beschleunigungsgleichung erfüllt:

$$\dot{v} = a \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{s^*(v, \Delta v)}{s} \right)^2 \right] \quad \text{IDM.} \quad (11.11)$$

Die IDM-Beschleunigung ist in der Form $\tilde{a}_{\text{mic}}(s, v, \Delta v)$ formuliert. Einerseits wird die aktuelle Geschwindigkeit v mit der Wunschgeschwindigkeit v_0 und andererseits der aktuelle Abstand s mit dem *Wunschabstand* s^* verglichen. Der Wunschabstand

$$s^*(v, \Delta v) = s_0 + \max \left(0, vT + \frac{v\Delta v}{2\sqrt{ab}} \right) \quad (11.12)$$

enthält neben dem Gleichgewichtsanteil $s_0 + vT$ auch einen *dynamischen Anteil* $v\Delta v/(2\sqrt{ab})$, der die „intelligente“ Bremsstrategie realisiert (siehe Abschnitt 11.3.4).

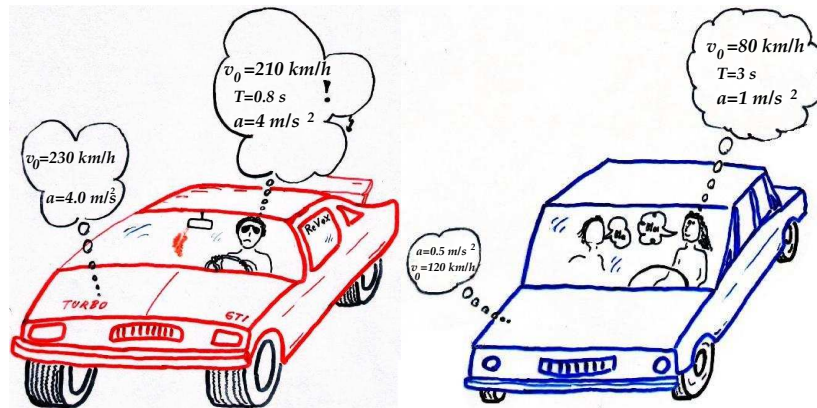


Abb. 11.2 Mit anschaulichen Modellparametern wie jenen des Gipps-Modells oder des Intelligent-Driver-Modells (IDM) kann man verschiedene Aspekte des Fahrstils (und der Leistungsgrenzen des Fahrzeugs) direkt durch unterschiedliche Parameterwerte abbilden.

⁶ Typische Werte für eine als angenehm empfundene Ruckbegrenzung liegen bei $|J| \leq 1.5 \text{ m/s}^3$.

11.3.3 Modellparameter

Die Modellparameter können anhand folgender drei Standardsituationen veranschaulicht werden: (i) Das *Beschleunigen* auf freier Strecke geschieht mit der Maximalbeschleunigung a , die beim Annähern an die Wunschgeschwindigkeit v_0 in einer durch δ beschriebenen Weise gegen Null geht. Je größer δ ist, desto später wird die Beschleunigung reduziert. (ii) Das *Folgefahren* geschieht mit einem durch die Folgezeit T charakterisierten Abstand zuzüglich eines Minimalabstandes s_0 bei stehendem Verkehr. (iii) Beim *Annähern* an langsamere oder stehende Fahrzeuge wird in Normalsituationen die komfortable Verzögerung b nicht überschritten. Zwischen den drei Situationen bestehen im Beschleunigungsverhalten kontinuierliche Übergänge.

Tabelle 11.2 Modellparameter des Intelligent-Driver-Modells (IDM).

Parameter	Typ. Wert Autobahn	Typ. Wert Stadtverkehr
Wunschgeschwindigkeit v_0	120 km/h	54 km/h
Folgezeit T	1.0 s	1.0 s
Minimalabstand s_0	2 m	2 m
Beschleunigungsexponent δ	4	4
Beschleunigung a	1.0 m/s ²	1.0 m/s ²
Verzögerung b	1.5 m/s ²	1.5 m/s ²

Jeder Modellparameter beschreibt eine klar abgrenzbare Eigenschaft (Abb. 11.2). Beispielsweise kann man deshalb den Übergang von einer Autobahn- zu einer Stadtsituation allein durch Änderung der Wunschgeschwindigkeit beschreiben (Tabelle 11.2). Die restlichen, den Fahrstil charakterisierenden Parameter bleiben unverändert. Damit wird modelliert, dass ein auf Autobahnen aggressiv oder vorsichtig agierender Autofahrer seinen Fahrstil im Stadtverkehr vermutlich nicht ändern wird.

Das IDM enthält *keine* explizite Reaktionszeit. Zusammen mit der stetig differenzierbaren Beschleunigungsfunktion entspricht es eher den Eigenschaften eines adaptiven Beschleunigungsreglers (*Adaptive Cruise Control, ACC*) als denen eines menschlichen Fahrers. Es kann zusätzlich um spezifisch menschliche Aspekte wie Schätzfehler, Reaktionszeiten, aber auch um Berücksichtigung mehrerer Vorderfahrzeuge erweitert werden (siehe Kap. 12).

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Modellen sind im IDM die Folgezeit T , die Geschwindigkeitsanpassungszeit v_0/a und die (nur in der später beschriebenen Modellerweiterung vorhandene) Reaktionszeit klar voneinander getrennt. Dadurch kann man den Unterschied zwischen ACC-Reglern und menschlichen Fahrern im Modell nachvollziehen. Weiterhin können die Fahrstilkombinationen „eher träge,

aber dennoch dicht auffahrend“ und „agil, aber auf ausreichenden Sicherheitsabstand achtend“ unterschieden werden.⁷

11.3.4 Intelligente Bremsstrategie

Das dynamische Annäherungsverhalten wird durch den Beitrag $v\Delta v/(2\sqrt{ab})$ des dynamischen Wunschabstandes (11.12) modelliert. Aufgrund der geforderten kontinuierlichen Übergänge ist allerdings immer auch der Gleichgewichtsanteil $s_0 + vT$ wirksam. Um die Bremsstrategie isoliert zu betrachten, setzt man den Gleichgewichtsanteil gleich Null und lässt den auf freier Strecke wirkenden Beschleunigungsanteil $a_F(v) = a[1 - (v/v_0)^\delta]$ unberücksichtigt. Ferner betrachtet man beispielsweise eine Annäherung an ein stehendes Fahrzeug oder eine rote Ampel, also $\Delta v = v$. Unter diesen Bedingungen ist die IDM-Beschleunigung gegeben durch

$$\dot{v} = -a \left(\frac{s^*}{s} \right)^2 = -\frac{av^2(\Delta v)^2}{4abs^2} = -\left(\frac{v^2}{2s} \right)^2 \frac{1}{b}.$$

Definiert man die *kinematische Verzögerung* durch

$$b_{\text{kin}} = \frac{v^2}{2s}, \quad (11.13)$$

ergibt sich die IDM-Beschleunigung dieses Spezialfalls zu

$$\dot{v} = -\frac{b_{\text{kin}}^2}{b}. \quad (11.14)$$

Bei einem Abbremsvorgang mit der Verzögerung b_{kin} ist der Bremsweg gleich dem aktuellen Abstand. Die kinematische Verzögerung stellt also die zur Kollisionsvermeidung mindestens notwendige Verzögerung dar. Damit erschließt sich aus Gl. (11.14) die selbstregulierende Bremsstrategie des IDM:

- Eine „kritische Situation“ ist dadurch charakterisiert, dass die kinematische Verzögerung größere Werte annimmt als die komfortable Verzögerung b .
- Ist die Situation kritisch, wird *noch etwas stärker* als mit der kinematischen Verzögerung gebremst: $|\dot{v}| = b_{\text{kin}}^2/b > b_{\text{kin}}$. Damit wird die kinematische Verzögerung in Richtung der komfortablen Verzögerung reduziert, also die Situation „unter Kontrolle“ gebracht.
- Ist die Situation unkritisch und ein Bremsen noch gar nicht notwendig, $b_{\text{kin}} < b$, ist die aktuelle Verzögerung $b_{\text{kin}}^2/b < b_{\text{kin}}$ *noch* geringer. Dadurch steigt b_{kin} in Richtung der komfortablen Verzögerung.

⁷ Offensichtlich fördert der erste, durch kleine Werte von a und T beschriebene Fahrstil Verkehrsinstabilitäten. Dies wird durch die Stabilitätsanalyse in Kap. 15 bestätigt.

Das Abbremsverhalten ist also *dynamisch selbstregulierend* im Hinblick auf eine Situation, bei der die kinematische Verzögerung gleich der komfortablen Verzögerung ist. Man kann zeigen (siehe Übungsaufgabe 11.4), dass diese Selbstregulierung explizit durch die Differentialgleichung

$$\frac{db_{\text{kin}}}{dt} = \frac{v b_{\text{kin}}}{s b} (b - b_{\text{kin}}) \quad (11.15)$$

gegeben ist. Die kinematische Verzögerung nähert sich daher *unabhängig von der Situation* der komfortablen Verzögerung b .

Bei diesen Überlegungen wurden Teile der IDM-Beschleunigung nicht berücksichtigt. Die Simulation in Abb. 11.4 (e) zeigt anhand einer Annäherung an ein anfangs weit entfernt stehendes Hindernis ($b_{\text{kin}} \ll b$) die komplette Dynamik. Zunächst wird die Verzögerung gemäß Gl. (11.15) annähernd auf die komfortable Verzögerung aufgebaut. Aufgrund des konservativen Charakters der anderen, in dieser Überlegung vernachlässigten Beschleunigungsanteile wird diese Verzögerung beim ersten Fahrzeug nicht ganz erreicht und die Verzögerung vor dem Stillstand sanft abgebaut. Das Fahrzeug kommt „auf den Punkt“ im Abstand $s = s_0$ zum Stehen. Bei den weiteren Fahrzeugen der Kolonne wird die komfortable Verzögerung etwas überschritten. Es kommt aber nie zu Notbremsungen oder gar Unfällen.

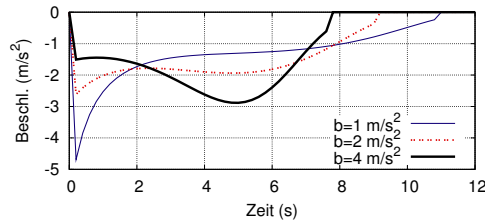


Abb. 11.3 Auswirkung der komfortablen Verzögerung auf das Verhalten bei Annäherung (Anfangsgeschwindigkeit 54 km/h) an eine LSA, die bei einem Abstand von 60 m zur Haltelinie auf rot schaltet.

Abbildung 11.3 zeigt den Effekt der selbstregulierenden Bremsstrategie anhand einer Situation, bei der plötzlich gebremst werden muss. Für $b = 1 \text{ m/s}^2$ ist die Situation für den IDM-Fahrer bereits „kritisch“, da $b_{\text{kin}} = v^2/(2s) = 1.9 \text{ m/s}^2$, so dass er mit noch stärkerer Verzögerung versucht, die Situation unter Kontrolle zu bekommen. Für $b = 4 \text{ m/s}^2$ hingegen ist die komfortable Verzögerung weit oberhalb der anfangs kinematisch notwendigen. Der simulierte Fahrer bremst anfangs deutlich schwächer, als es b_{kin} entspricht, so dass b_{kin} zunächst deutlich steigt. Wieder bewirken die anderen IDM-Terme, dass die Wunschverzögerung nicht ganz erreicht wird.

Warum verhalten sich durch das IDM modellierte Fahrer umso vorausschauender, je kleiner b ist? Warum sind sehr kleine Werte von b (unterhalb von 1 m/s^2) dennoch nicht sinnvoll?

Machen Sie sich klar, dass in der beschriebenen Annäherungssituation der durch den dynamischen Teil von s^* vermittelte Beschleunigungsanteil wesentlich größer ist als der aller anderen Anteile und dass außerdem diese Anteile fast immer negativ sind, also ein defensives Fahrverhalten modellieren.

11.3.5 Dynamische Eigenschaften

Abbildung 11.4 zeigt die IDM-Simulationen der beiden Standardszenarien „Verkehrszusammenbruch auf einer Autobahn mit einer Zufahrt als Engstelle“ und „Beschleunigen und Anhalten im Stadtverkehr“. Das Geschwindigkeitsfeld des Autobahn Szenarios (Teilbild (a)) zeigt eine ähnliche Dynamik wie das Gipps-Modell in Abb. 11.1: Nach dem Zusammenbruch entsteht nahe der Engstelle stationärer gestauter Verkehr. Weiter stromaufwärts kommt es zu Stauwellen, die sich mit etwa -15 km/h ausbreiten. Die Wellenlänge ist tendenziell kleiner als die realer Stauwellen, ansonsten wird die raumzeitliche Dynamik gut reproduziert. Die sich vergrößernden Stauwellen sind die Folge einer simulierten Verkehrsinstabilität. Je nach Parameter und Verkehrsdichte ist das IDM instabil gegenüber Stauwellen (kolonneninstabil, siehe Kap. 15) oder absolut stabil. Außer bei extrem unrealistischen Parameterwerten kommt es jedoch nie zu Unfällen.

Das Fluss-Dichte-Diagramm der virtuellen Detektorquerschnitte in Teilbild (b) zeigt die typischen Merkmale realer Fluss-Dichte-Daten (vgl. Kap. 4):

- Bei freiem Verkehr liegen die Daten nahezu auf einer Kurve, während die gebundenem Verkehr zuzuordnenden Datenpunkte über einen weiten zweidimensionalen Fluss-Dichte-Bereich streuen.
- Die Fluss-Dichte-Punkte des freien Verkehrs liegen nicht auf einer Geraden, sondern auf einer nahe des Flussmaximums stärker gekrümmten Kurve.
- Die Punkte nahe des Flussmaximums sind in Form eines gespiegelten griechischen λ (*inverse- λ -Form*) angeordnet. Dies bedeutet, dass in einem gewissen Dichtebereich (hier von etwa 18 bis 25 Fz/km) sowohl freier, als auch gebundener Verkehr möglich ist. Damit zeigt das IDM die in der Realität beobachtete Bistabilität und daraus resultierende Hysterese-Effekte wie einen Kapazitätsabfall (*capacity-drop*). Er beträgt hier etwa 300 Fz/h bzw. 15 %.

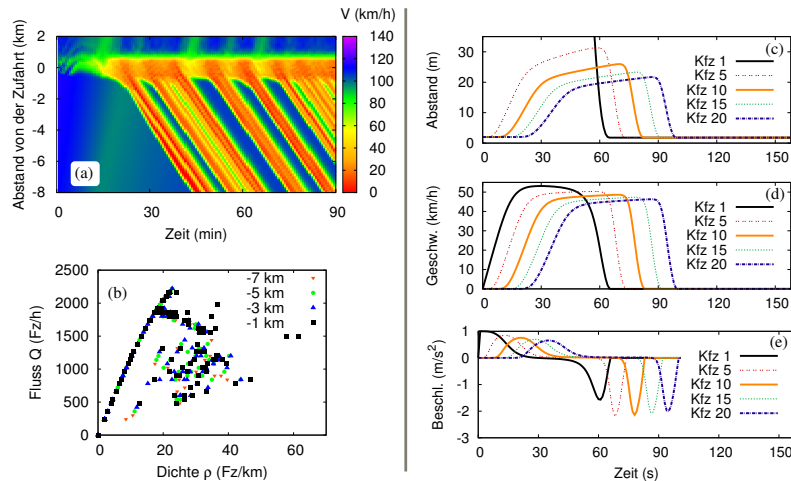


Abb. 11.4 Simulation der beiden Standardszenarien „Autobahn“ (links) und „Stadtverkehr“ (rechts) mit dem Intelligent-Driver-Modell (11.11) unter Verwendung der Parameter aus Tabelle 11.2.

Der Vergleich mit realen Daten in Abbildung 11.5 zeigt eine nahezu quantitative Übereinstimmung im Fluss-Dichte-, Geschwindigkeits-Dichte- und Geschwindigkeits-Fluss-Diagramm. Im Gegensatz zum Gipps-Modell wird auch die Krümmung der jeweils freien Zweige richtig wiedergegeben. Damit ist das IDM geeignet, die Herkunft der kontrovers diskutierten ausgeprägten Streuung der Fluss-Dichte-Daten zu hinterfragen. Ein Vergleich mit der in der Simulation natürlich verfügbaren echten Dichte in Abb. 11.5 (b) zeigt, wie vorsichtig man bei der Interpretation der Fluss-Dichte-Daten sein muss.⁸

Die Simulation des Stadtszenarios, Abb. 11.4 (c)-(e), zeigt einen realistischen glatten Beschleunigungs- und Verzögerungsverlauf. Allerdings tritt beim Folgeverhalten nahe der Wunschgeschwindigkeit eine etwas unrealistische Situation auf: Die hinteren Fahrzeuge erreichen nicht die Wunschgeschwindigkeit und demnach vergrößert sich ihr Abstand bis zum Beginn der Bremsphase immer weiter. Dies liegt daran, dass aufgrund der kontinuierlichen Beschleunigungsfunktion der (immer in Richtung Verzögerung wirkende) Einfluss des Vorderfahrzeugs oberhalb des nominellen Wunschabstandes $s^*(v, 0) = s_0 + vT$ nicht schlagartig auf Null geht. Deshalb wird der tatsächliche Gleichgewichtsabstand nahe der Wunschgeschwindigkeit deutlich größer. Dies wird im nächsten Unterabschnitt weiter untersucht und im Abschnitt 11.3.7 wird eine Lösung vorgeschlagen.

⁸ Selbst die Streuung der Daten gestauten Verkehrs als solche ist eine Frage der Darstellung: Während bei der Fluss-Dichte-Darstellung nur die Daten gestauten Verkehrs weit gestreut erscheinen, streuen im Geschwindigkeits-Fluss-Diagramm 11.5 (d) die zu freiem Verkehr gehörigen empirischen Datenpunkte etwa gleich stark wie die gestauten Verkehrs, obwohl es sich in beiden Darstellungen um dieselben Daten handelt.

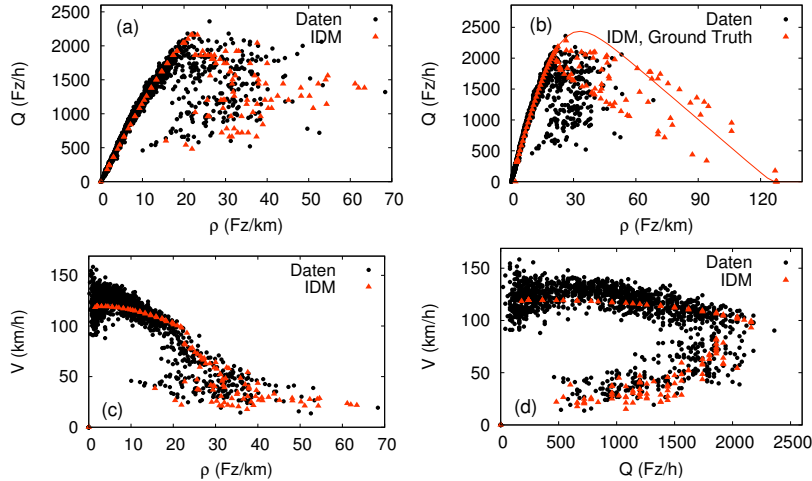


Abb. 11.5 (a) Fundamentaldiagramm, (c) Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm und (d) Geschwindigkeits-Fluss-Diagramm eines virtuellen Detektors der in Abb. 11.4 gezeigten Autobahnsimulation (1 km stromaufwärts der Rampe) im Vergleich mit Daten eines realen Querschnitts auf der A5 in der Nähe von Frankfurt. Sowohl bei den Daten als auch in der Simulation wurden arithmetische Geschwindigkeitsmittel zugrundegelegt. (b) Fluss-Dichte-Diagramm des IDM unter Verwendung der echten (lokalen) Dichte.

11.3.6 Fließgleichgewicht

Für das Fließgleichgewicht $\dot{v} = \Delta v = 0$ erhält man aus der IDM-Beschleunigungs-gleichung (11.11) die Bedingung

$$1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^\delta - \left(\frac{s_0 + vT}{s}\right)^2 = 0.$$

Für allgemeine Werte des Beschleunigungsexponenten δ lässt sich dieser Ausdruck nur nach s auflösen (vgl. Abb. 11.6),

$$s = s_e(v) = \frac{s_0 + vT}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^\delta}}. \quad (11.16)$$

Man erhält das Fließgleichgewicht als Gleichgewichts-Nettoabstand $s_e(v)$ mit der Geschwindigkeit als unabhängige Variable anstelle einer Gleichgewichtsgeschwindigkeit $v_e(s)$ in Abhängigkeit des Abstandes. Mit der Mikro-Makro-Beziehung (10.15), $s_e = \frac{1}{\rho_e} - l$, $v = V$ und $Q_e = \rho_e V$, bekommt man das in Abb. 11.6 dargestellte Geschwindigkeits-Dichte- sowie das Fundamentaldiagramm.

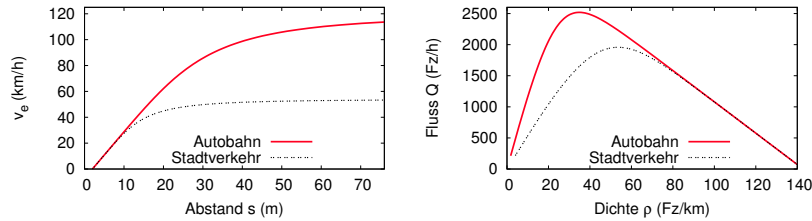


Abb. 11.6 Mikroskopisches (links) bzw. makroskopisches Fundamentaldiagramm (rechts) des IDM mit den zwei Parametersätzen der Tabelle 11.2.

Zu beachten ist, dass wegen des kontinuierlichen Übergangs des Fahrzustands „Folgefahrt“ in den Zustand „freie Fahrt“ der Gleichgewichtsabstand $s_e(v)$ nicht durch $s^*(v, 0) = s_0 + vT$ gegeben ist. Vielmehr ist er wegen des Nenners in Gl. (11.16) in der Nähe der Wunschgeschwindigkeit wesentlich höher. Daher ist das Fundamentaldiagramm auch nicht dreieckig, sondern in der Spitze abgerundet. Dies führt zu der beobachteten Krümmung der makroskopischen Geschwindigkeits-Dichte- und der Fluss-Dichte-Diagramme (Abb. 11.5), aber bei identischen Fahrstilen und Fahrzeugen nahe der Wunschgeschwindigkeit auch zu unrealistischem Folgeverhalten.

11.3.7 Verbesserte Beschleunigungsfunktion

In diesen Abschnitt wird ein mögliches Vorgehen bei der Modellentwicklung gezeigt. Die Zielsetzung ist, das in den Abb. 11.4 (c) und (d) dargestellte unbefriedigende Abstandsverhalten nahe der Wunschgeschwindigkeit zu verbessern. Die Aufgabenstellung erfordert eine Verschärfung des zweiten Punktes der Anforderungsliste des Abschnitts 11.3.1: Der Gleichgewichtsabstand $s_e(v) = s^*(v, 0)$ soll für $v < v_0$ *exakt* durch $s_0 + vT$ gegeben sein. Um die gewünschten und sinnvollen Eigenschaften des IDM, insbesondere bei Annäherungsvorgängen, nicht zu beeinträchtigen, sollte die Modifikation nur in der Nähe des Gleichgewichts und gleichzeitig nahe der Wunschgeschwindigkeit eine merkliche Auswirkung haben. Hingegen sollte die Beschleunigungsfunktion für die Fälle $v \ll v_0$ sowie für $z(s, v, \Delta v) := s^*(v, \Delta v)/s \ll 1$ und $z \gg 1$ weitgehend unverändert bleiben.

Dies kann durch eine Fallunterscheidung zwischen $z < 1$ (der tatsächliche Abstand ist größer als der dynamische Wunschabstand) und $z \geq 1$ realisiert werden. Die neue Bedingung fordert $\tilde{a}_{mic} = 0$ für alle Kombinationen der unabhängigen Variablen, für die $z(s, v, \Delta v) = 1$ und außerdem $v < v_0$ ist. Die übrigen Bedingungen der „Anforderungsliste“, insbesondere die stetige Differenzierbarkeit nach allen Variablen sowie die Bedingungen (11.1) bis (11.4), erfordern an der Übergangsstelle $z = 1$ stetige Differenzierbarkeit bezüglich z mit $\partial \tilde{a}_{mic} / \partial z < 0$ und außerdem $\tilde{a}_{mic} < 0$ für $z > 1$. Vermutlich die einfachste Beschleunigungsfunktion, die alle diese Bedingungen erfüllt, ist gegeben durch

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} a(1-z^2) & z = \frac{s^*}{s} \geq 1, \\ a_F \left(1 - z^{\frac{2a}{a_F}}\right) & \text{sonst,} \end{cases} \quad (11.17)$$

mit der freien IDM-Beschleunigung

$$a_F(v) = \lim_{s \rightarrow \infty} a_{\text{IDM}}(s, v, \Delta v) = a \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta \right]. \quad (11.18)$$

Dieses *Improved-Intelligent-Driver-Modell* (IIDM) hat denselben Satz von Modellparametern wie das IDM und, abgesehen vom Folgeverhalten nahe der Wunschgeschwindigkeit, die gleichen dynamischen Eigenschaften. Die Wiederholung der Simulation des Stadt-Szenarios mit diesem IIDM ergibt das gewünschte Verhalten: Alle Fahrzeuge der Kolonne erreichen die Wunschgeschwindigkeit (Abb. 11.7 links). Die anderen Eigenschaften des IDM, insbesondere die selbststabilisierende Bremsstrategie und die Bedeutung der komfortablen Verzögerung, bleiben hingegen qualitativ unverändert (Abb. 11.7 rechts).

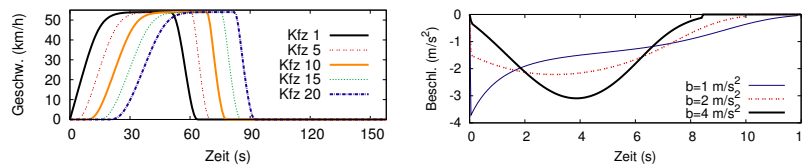


Abb. 11.7 Simulation des Stadt-Szenarios (links) und der in Abb. 11.3 gezeigten Situation mit dem IIDM bei unveränderten Parametern.

Allerdings ist das Fundamentaldiagramm nun exakt dreieckig. Eine Simulation des Autobahn-Szenarios ergibt deshalb für freien Verkehr keine Krümmung des Schwerpunktverlaufes der Punktwolken im Fluss-Dichte-, Geschwindigkeits-Fluss- und Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm – im Gegensatz zu den Daten und dem ursprünglichen IDM (vgl. Abb. 11.5). Woher eine solche Krümmung anderweitig stammen kann, wird in Aufgabe 11.6 diskutiert.

Übungsaufgaben

11.1. Bedingungen an das mikroskopische Fundamentaldiagramm

Leiten Sie aus den Konsistenzbedingungen (11.1) bis (11.4) die Bedingungen (11.6) an das mikroskopische Fundamentaldiagramm her.

11.2. Faustregeln für Abstand und Bremsweg

1. Welcher Folgezeit T entspricht die Fahrschulregel „Abstand (in m) gleich halber Tacho (in km/h)“?

2. Interpretieren Sie auch die amerikanische Regel „*For every five miles per hour you drive faster, add a car length to your safety gap*“. Teilweise wird diese Regel auch mit *ten miles per hour* zitiert.
3. Eine Faustformel für den Bremsweg zum Stillstand (ohne Reaktionszeit) lautet „Tachowert quadrieren und durch 100 teilen“. Welcher Bremsverzögerung entspricht dies?

11.3. Reaktion auf einscherende Fahrzeuge

Durch Fahrstreifenwechsel eines anderen Fahrzeugs (Geschwindigkeit gleich der bisherigen Gleichgewichtsgeschwindigkeit) wird der Gleichgewichtsabstand kurzfristig um 50 % unterschritten. Bestimmen Sie die gemäß dem vereinfachten Gipps-Modell (mit $\Delta t = 1$ s, $b = 2$ m/s²) und dem IDM die daraus resultierende Bremsverzögerung, falls $a = 1$ m/s², $\delta = 4$ und alle beteiligten Fahrzeuge mit konstanter Geschwindigkeit $v = v_0/2 = 72$ km/h fahren. Weitere Parameter des Gipps-Modells oder des IDM werden nicht benötigt.

11.4. IDM-Bremsstrategie

Leiten Sie für die Annäherungssituation an ein stehendes Hindernis ($\Delta v = v$) unter isolierter Betrachtung des dynamischen IDM-Bremsanteils $\dot{v} = -b_{\text{kin}}^2/b$ die Gleichung (11.15) der selbstregulierenden Bremsstrategie her. Berücksichtigen Sie die immer gültige Beziehung $\dot{s} = -\Delta v$.

11.5. Analyse eines Mikromodells

Gegeben ist ein Fahrzeugfolgemodell, das durch folgende Beschleunigungsgleichung beschrieben wird:

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} a & \text{falls } v < \min(v_0, v_{\text{safe}}), \\ 0 & \text{falls } v = \min(v_0, v_{\text{safe}}), \\ -a & \text{sonst,} \end{cases} \quad v_{\text{safe}} = -aT + \sqrt{a^2T^2 + v_l^2 + 2a(s - s_0)}.$$

Hierbei bedeuten v_l die Geschwindigkeit des Vorderfahrzeugs und s der Stoßstange-zu-Stoßstange-Abstand zu diesem.

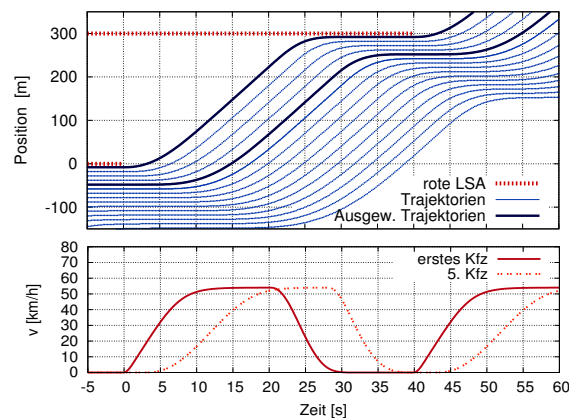
1. Erläutern Sie die Bedeutung der Modellparameter a , s_0 , v_0 und T , indem Sie (i) die Beschleunigung bei freier Strecke, (ii) das Folgeverhalten bei gleichbleibendem Abstand und konstanter Geschwindigkeit, (iii) das Abbremsen vor einem einzelnen stehenden Fahrzeug betrachten.
2. Es sei nun $v_0 = 20$ m/s, $a = 1$ m/s², $T = 1.6$ s und $s_0 = 3$ m. Bestimmen Sie die Gleichgewichtsgeschwindigkeit $v_e(s)$ als Funktion des Abstandes sowie das Fundamentaldiagramm für 5 m lange Fahrzeuge. Zeichnen Sie das Fundamentaldiagramm.
3. Nehmen Sie nun $v_0 = 20$ m/s, $a = 1$ m/s², $T = 0$ und $s_0 = 3$ m an. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit für ein zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ aus dem Stillstand anfahrenes Fahrzeug, welches vor einer roten Ampel bei $x = 603$ m wieder anhalten muss. *Hinweis:* Die Ampel wird durch ein stehendes, „virtuelles“ Fahrzeug modelliert; im Verlauf der Fahrt wird die Wunschgeschwindigkeit erreicht.

11.6. Heterogener Verkehr

Das modifizierte IDM mit exakt dreieckigem Fundamentaldiagramm führt bei der Simulation identischer Fahrzeuge nicht zu der in den Daten (Abb. 11.5) beobachteten Absenkung der Geschwindigkeit bereits vor dem Verkehrszusammenbruch. Kann dieser Effekt durch die Kombination von unterschiedlichen Wunschgeschwindigkeiten und einer Möglichkeit zum Überholen erreicht werden?

11.7. Stadtverkehr mit dem modifizierten IDM

Gegeben sind die Simulationsergebnisse einer Stadtsituation mit zwei Lichtsignalanlagen (LSA), in der mehrere wartende Fahrzeuge nach Grünwerden der ersten LSA zur zweiten LSA fahren und wieder anhalten, bis auch diese LSA grün wird. Das obere Teilbild stellt die Trajektorien aller 15 Fahrzeuge sowie die Rotphasen der Ampeln (waagerechte Linien) dar. Das untere Diagramm zeigt die Geschwindigkeiten der beiden dicker gezeichneten Trajektorien. Für die Simulation wurde das modifizierte Intelligent-Driver-Modell (IIDM) verwendet.



1. Schätzen Sie die Kapazität K der freien Strecke (ohne Ampeln) durch den maximalen Fluss ab.
2. Wieviele Fahrzeuge würden in einer Grünphase der Ampel bei $x = 0$ durchkommen, wenn diese (i) 5 s, (ii) 15 s oder (iii) 40 s lang ist? Leiten Sie daraus eine „Bemessungsregel“ der notwendigen Grünzeit τ für n durchkommende Fahrzeuge in der Form $\tau(n) = \tau_0 + \beta n$ ab, d.h. bestimmen Sie τ_0 und β . Kann man β mit der Kapazität K in Beziehung setzen?
3. Schätzen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_{cong} des Übergangs Warteschlange \rightarrow anfahrende Fahrzeuge aus dem Trajektoriediagramm ab.
4. Schätzen Sie die verwendeten IDM-Modellparameter v_0 , $l_{\text{eff}} = l_{\text{Kfz}} + s_0$, $T = 1/(\rho_{\text{max}} c_{\text{cong}})$, a und b . Legen Sie zur Bestimmung der Beschleunigungen geeignete Tangenten in das Geschwindigkeitsdiagramm.

Literaturhinweise

- Gipps, P.G.: A behavioural car-following model for computer simulation. *Transportation Research Part B: Methodological* **15** (1981) 105–111
- Treiber, M., Hennecke, A., Helbing, D.: Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations. *Physical Review E* **62** (2000) 1805–1824

Am Ende der Reaktionszeit wäre bei der Situation mit $v_2 = 70 \text{ km/h}$ das Kind nur noch

$$s(T_r) = s(0) - v_2 T_r = 6.50 \text{ m}$$

von der Stosstange des Fahrzeugs entfernt. Nun bräuchte der Fahrer noch die Strecke $s_B(v_2) = 23.6 \text{ m}$ zum Bremsen, hat aber nur $s(T_r) = 6.5 \text{ m}$ zur Verfügung. Ohne Kollision würde das Fahrzeug also eine zusätzliche Strecke $\Delta s = 17.13 \text{ m}$ bis zum Stillstand benötigen. Daraus ergibt sich die Kollisionsgeschwindigkeit durch Umstellen der Bremsweggleichung zu²

$$v_{\text{coll}} = \sqrt{2b\Delta s} = 16.56 \text{ m/s} = 59.6 \text{ km/h.}$$

Setzt man alle Zahlenwerte erst zum Schluss ein, bekommt man

$$s(T_r) = v_1 T_r + \frac{v_1^2}{2b} - v_2 T_r,$$

$$\Delta s = \frac{v_2^2}{2b} - s(T_r) = (v_2 - v_1) \left(\frac{v_1 + v_2}{2b} + T_r \right)$$

und damit den allgemeinen Ausdruck

$$v_{\text{coll}} = \sqrt{2b\Delta s} = \sqrt{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1 + 2bT_r)}.$$

Aufgaben aus Kapitel 11

11.1 Bedingungen an das mikroskopische Fundamentaldiagramm. Die Bedingung (11.4) gilt insbesondere für $v_l = 0$, also $a_{\text{mic}}(s, 0, 0) = 0$ für $s \leq s_0$. Dies entspricht $v_e(s) = 0$ für $s \leq s_0$, also insbesondere für $s = 0$.

Die Bedingungen (11.1) und (11.2) gelten insbesondere für $v = v_l$. Für die Beschleunigungsfunktion \tilde{a} folgt daraus

$$\frac{\partial \tilde{a}(s, v, 0)}{\partial s} \geq 0, \quad \frac{\partial \tilde{a}(s, v, 0)}{\partial v} < 0.$$

Längs der Gleichgewichtskurve $v_e(s)$ muss das Differential von \tilde{a} bei gleichzeitiger Variation von s und v (bei $\Delta v = 0$) verschwinden:

$$d\tilde{a} = \frac{\partial \tilde{a}(s, v, 0)}{\partial s} ds + \frac{\partial \tilde{a}(s, v, 0)}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial \tilde{a}(s, v, 0)}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{a}(s, v, 0)}{\partial v} v_e'(s) \right) ds = 0.$$

Hierbei wurde die Definition der Gleichgewichtskurve, $dv = v_e'(s) ds$, angewandt, also

$$v_e'(s) = \frac{-\partial \tilde{a}(s, v, 0) / \partial s}{\partial \tilde{a}(s, v, 0) / \partial v} \geq 0.$$

² Die „offizielle“ Antwort bei der Führerscheinprüfung lautet 60 km/h .

Es gilt $v_e'(s) = 0$, falls das Vorderfahrzeug aufgrund der Entfernung die eigene Fahrweise nicht beeinflusst (zweiter Ausdruck in (11.2)).

Schließlich folgt die Bedingung $\lim_{s \rightarrow \infty} v_e(s) = v_0$ direkt aus dem zweiten Teil der Bedingung (11.1).

11.2 Faustregeln für Abstand und Bremsweg

Teilaufgabe 1. Gemäß der „Abstand gleich halber Tacho“-Regel ist der Abstand proportional zur Geschwindigkeit. Damit ist der Quotient $T = s/v$, also die gesuchte Folgezeit, unabhängig von der Geschwindigkeit. Den Zahlenwert erhält man durch einfaches Einsetzen, wobei man aber sorgfältig auf die Einheiten achten muss:

$$\begin{aligned} \text{Abstand in m} &= \frac{1}{2} (\text{Geschwindigkeit in km/h}) \\ \frac{s}{\text{m}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\text{km/h}} \right), \end{aligned}$$

also

$$T = \frac{s}{v} = \frac{\frac{1}{2} \text{m} \left(\frac{v}{\text{km/h}} \right)}{v} = \frac{\frac{1}{2} \text{m}}{\text{km/h}} = \frac{0.5 \text{h}}{1000} = \frac{1800 \text{s}}{1000} = 1.8 \text{s}.$$

Teilaufgabe 2. Eine Meile entspricht etwa 1.6 km. Es ist aber nicht eindeutig, wie lang das „car“ sein soll. Wir nehmen einen USA-Straßenkreuzer mit $l = 5 \text{ m}$ an. Mit der üblichen Bezeichnung mph für *miles per hour* erhält man

$$T = \frac{s}{v} = \frac{l}{5 \text{ mph}} = \frac{5 \text{ m}}{5 \text{ mph} \cdot 1.6 \frac{\text{km/h}}{\text{mph}} \cdot \frac{1 \text{ m/s}}{3.6 \text{ km/h}}} = \frac{10 \text{ m} \cdot 3.6 \text{ s/m}}{16} = 2.25 \text{ s}.$$

Die „aggressivere“ Variante mit 10 mph pro Fahrzeuglänge entspräche $T = 1.13 \text{ s}$. Dies ist zwar konsistent mit realen Zeitabständen (vgl. Abb. 4.8), aber als Regel doch zu wenig sicher.

Teilaufgabe 3. Die Faustformel „Bremsweg gleich Quadrat der Geschwindigkeit durch 100“ für den Bremsweg s in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v lautet unter Berücksichtigung der Einheiten:

$$\frac{s}{\text{m}} = 0.01 \left(\frac{v}{\text{km/h}} \right)^2.$$

Ein Vergleich mit der kinematischen Bremswegformel $s_B = v^2/(2s)$ liefert

$$b = \frac{v^2}{2s} = \frac{v^2}{0.02 \text{ m}} \left(\frac{\text{km}}{\text{h v}} \right)^2 = \frac{50}{3.6^2} \text{ m/s}^2 = 3.86 \text{ m/s}^2.$$

Zum Vergleich: Komfortable Verzögerungen liegen um 2 m/s^2 , während eine Vollbremsung auf trockener Straße etwa 8 bis 10 m/s^2 entspricht. Auf feuchter Straße werden noch etwa 4 bis 6 m/s^2 erreicht. Mit der Bremswegregel liegt man auch bei nasser Fahrbahn noch auf der sicheren Seite, nicht jedoch bei verschneiter oder vereister Fahrbahn.

11.3 Reaktion auf einscherende Fahrzeuge

Reaktion beim IDM. Der Gleichgewichtsabstand als Funktion der Geschwindigkeit beträgt

$$s = s_e(v) = \frac{s_0 + vT}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^\delta}}.$$

Der wesentliche Anteil ist der geschwindigkeitsabhängige Abstand $vT = v_0T/2$. (Für $s_0 = 2$ m und $\delta = 4$ machen die restlichen Anteile etwa 10 % aus.) Nach Einscheren des neuen Vorderfahrzeugs reduziert sich nach Aufgabenstellung der Abstand von s_e auf $s_e/2$, aber die Geschwindigkeitsdifferenz zum Vorderfahrzeug bleibt (nach Voraussetzung) gleich Null. Damit ergibt sich als IDM-Reaktion (mit $a = 1$ m/s² und $\delta = 4$):

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\text{IDM}} &= a \left[1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^\delta - \left(\frac{s_0 + vT}{s}\right)^2 \right] \\ &\stackrel{(v=v_0/2, s=s_e/2)}{=} a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\delta - \left(\frac{s_0 + v_0T/2}{s_e/2}\right)^2 \right] \\ &\stackrel{s_e(v)=s_e(v_0/2)}{=} -3a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\delta \right] = -\frac{45}{16} \text{ m/s}^2 = -2.81 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Reaktion beim vereinfachten Gipps-Modell. Für den Gleichgewichts-Nettoabstand gilt $s_e(v) = v\Delta t$. Vor dem Einscheren gilt $v = v_0/2$ und $s = (v_0\Delta t)/2$. Genau zum Zeitpunkt t werde nun eingeschert, so dass der Abstand zum Berechnen der neuen Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ durch den halben Gleichgewichtsabstand $s = (v_0\Delta t)/4$ gegeben ist. Die neue Geschwindigkeit ist durch v_{safe} begrenzt:

$$v(t + \Delta t) = v_{\text{safe}} = -b\Delta t + \sqrt{b^2(\Delta t)^2 + \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{bv_0\Delta t}{2}} = 19.07 \text{ m/s}.$$

Damit ergibt sich eine effektive Beschleunigung von

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\text{Gipps}} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \approx -0.93 \text{ m/s}^2.$$

Das Gipps-Modell modelliert also eine eher entspannte Fahrer-Reaktion auf den nur noch halben Sicherheitsabstand. Sowohl das Gipps-Modell als auch das IDM würden deutlich höhere Verzögerungen erzeugen für den Fall, dass das einscherende Fahrzeug langsamer wäre. Dann wäre „Gefahr im Verzug“.

11.4 IDM-Bremsstrategie. Hier muss man die Quotienten- und Kettenregeln anwenden und danach $\dot{s} = -v$ und $\dot{v} = -b_{\text{kin}}^2/b = -v^4/(4bs^2)$ setzen:

$$\begin{aligned}\frac{db_{\text{kin}}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2s} \right) = \frac{4vs\dot{v} - 2v^2\dot{s}}{4s^2} \\ &= \frac{v^3}{2s^2} \left(1 - \frac{v^2}{2sb} \right) = \frac{vb_{\text{kin}}}{sb} (b - b_{\text{kin}}).\end{aligned}$$

11.5 Analyse eines Mikromodells

Teilaufgabe 1. Bei Beschleunigung auf freier Strecke ist $v_{\text{safe}} > v_0$; v_{safe} spielt also keine Rolle. Daher bedeuten v_0 die Wunschgeschwindigkeit und a die Beschleunigung falls $v < v_0$, aber auch die Verzögerung im Fall $v > v_0$.

Das Folgeverhalten bei konstantem Abstand und konstanter Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$v = \min(v_0, v_{\text{safe}}).$$

Entweder gilt $v_{\text{safe}} > v_0$ und damit $v = v_0$, oder es gilt $v = v_{\text{safe}}$ und wegen der Bedingung gleichbleibenden Abstands auch $v_l = v = v_{\text{safe}}$. Aus der Gleichung für v_{safe} mit $v = v_l$,

$$v = -aT + \sqrt{a^2T^2 + v^2 + 2a(s - s_0)},$$

folgt

$$s = s_0 + vT.$$

Damit ist s_0 der Mindestabstand und T die gewünschte minimale Folgezeitlücke.

Falls $v > v_0$ oder $v > v_{\text{safe}}$ ist, wird mit der Beschleunigung $-a$ abgebremst. Also gibt a nicht nur die Wunsch-Beschleunigung, sondern auch die einheitliche Bremsverzögerung an. Das Modell ist symmetrisch bezüglich Beschleunigen und Bremsen.

Teilaufgabe 2. Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit als Funktion des Abstandes (mikroskopisches Fundamentaldiagramm) ist gegeben durch

$$v_e(s) = \min \left(v_0, \frac{s - s_0}{T} \right).$$

Damit erhält man das dreieckige Fundamentaldiagramm

$$Q_e(\rho) = \min \left(v_0\rho, \frac{1 - \rho l_{\text{eff}}}{T} \right)$$

mit dem Flussmaximum $Q_{\text{max}} = (T + l_{\text{eff}}/v_0)^{-1} = 1800 \text{ Fz/h}$ bei einer Dichte $\rho_K = 1/(l_{\text{eff}} + v_0T) = 25/\text{km}$. Für eine weitere Diskussion der Eigenschaften siehe Kap. 8.4.

Teilaufgabe 3. Die Strecken zum Beschleunigen von Null auf $v_0 = 20 \text{ m/s}$ und der Bremsweg von v_0 zum Stillstand sind gleich groß und betragen

$$s_a = s_b = \frac{v_0^2}{2a} = 200 \text{ m}.$$

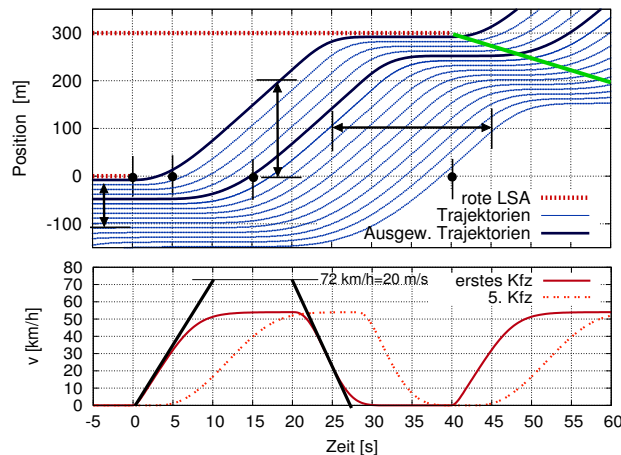
Bei einem Mindestabstand von 3 m und einer Haltelinien-Position bei 603 m wird also von $x = 0$ bis $x_1 = 200$ m beschleunigt und von $x_2 = 400$ m bis $x_3 = 600$ m verzögert. Beschleunigungs- und Abbremszeit betragen je $v_0/a = 20$ s und die Zeit für das Zurücklegen der 200 m langen Reststrecke mit der Wunschgeschwindigkeit beträgt 10 s. Damit ergibt sich die vollständige Trajektorie zu

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}at^2 & t \leq t_1 = 20 \text{ s,} \\ x_1 + v_0(t - t_1) & t_1 < t \leq t_2 = 30 \text{ s,} \\ x_2 + v_0(t - t_2) - \frac{1}{2}a(t - t_2)^2 & t_2 < t \leq t_3 = 50 \text{ s.} \end{cases}$$

11.6 Heterogener Verkehr. Bei einer Kombination aus heterogenem Verkehr und mehreren Fahrstreifen ergibt sich auch bei dreieckigen Fundamentaldiagrammen eine Absenkung der mittleren Geschwindigkeit vor dem Kapazitätsmaximum. Zunächst ist bereits das flottengemittelte Fundamentaldiagramm gekrümmt, da die Dichte ρ_K beim Flussmaximum für die verschiedenen Fahrzeugklassen an unterschiedlichen Stellen liegt und bei hinreichend hoher Dichte einige Fundamentaldiagramme bereits abfallen. Ohne Überholmöglichkeit würde sich aber dennoch keine Geschwindigkeitsabsenkung ergeben, da sich alle Fahrzeuge hinter den langsamsten Fahrzeugen stauen und damit nur das Fundamentaldiagramm der langsamsten Fahrzeugklasse relevant ist.

Nimmt man dagegen mehrere Fahrstreifen, aber mit wachsender Verkehrsdichte abnehmende Wechsel- und Überholmöglichkeiten an, ergibt sich bei geringer Dichte die flottengemittelte Geschwindigkeit. Nahe der Kapazität und wenigen Überholmöglichkeiten erhält man aber nahezu die Geschwindigkeit der langsamsten Fahrzeuge. Das Ergebnis ist eine Geschwindigkeitsabsenkung mit der Dichte bereits bei freiem Verkehr.

11.7 Stadtverkehr mit dem modifizierten IDM



1. Die Kapazität K ist durch den maximal möglichen stationären Fluss ohne Hindernisse (hier Ampeln) definiert. In der Abbildung ist der maximale Fluss durch die *dynamische* Kapazität gegeben. Durch Ablesen (horizontaler Doppelpfeil in der Mitte) ergibt sich:

$$K = Q_{\max} \approx \frac{9 \text{ Fz}}{20 \text{ s}} = 1620 \text{ Fz/h.}$$

2. Die Zahl $n(\tau)$ der Fahrzeuge bei verschiedenen Grünzeiten τ sind die Fahrzeuge zwischen den schwarzen Punkten: $n(5) = 1$, $n(15) = 5$, $n(40) = 15$. Der Wert β ist gleich dem Kehrwert der Kapazität,

$$\beta = \frac{1}{K} = \frac{40 \text{ s} - 15 \text{ s}}{15 - 5} = 2.5 \text{ s/Fz,}$$

und stimmt mit K im Rahmen der „Messgenauigkeit“ von einem Fahrzeug überein. (Man hätte β auch aus der kleinsten und mittleren Grünzeit berechnen können, was zum selben Ergebnis führt.) Daraus ergibt sich die *Zusatzzeit* für das erste Fahrzeug zu $\tau_0 = 15 \text{ s} - 5\beta = 2.5 \text{ s}$.

3. Steigung des stromabwärtigen Übergangs Warteschlange \rightarrow anfahrende Fahrzeuge:

$$c_{\text{cong}} = -\frac{100 \text{ m}}{20 \text{ s}} = -5 \text{ m/s} = -18 \text{ km/h.}$$

4. Wunschgeschwindigkeit als Maximalgeschwindigkeit auf leerer Strecke: $v_0 = 15 \text{ m/s} = 54 \text{ km/h}$. Die effektive Länge ergibt sich aus der Verkehrsdichte im Stau (linker Markierungs-Doppelpfeil): $\rho_{\max} = 1/l_{\text{eff}} = 10 \text{ Fz}/100 \text{ m} = 100 \text{ Fz/km}$ $\Rightarrow l_{\text{eff}} = 10 \text{ m}$. Folgezeit: $T = 1/(\rho_{\max} c_{\text{cong}}) = 2 \text{ s}$. Bestimmung der Beschleunigungen aus maximaler bzw. minimaler Tangentensteigung des ersten Fahrzeugs im unteren Diagramm:

$$a = \frac{20 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}^2, \quad b = \frac{20 \text{ m/s}}{7 \text{ s}} = 2.9 \text{ m/s}^2.$$

Aufgaben aus Kapitel 12

12.1 Statistische Eigenschaften des Wiener-Prozesses. Zur Bestimmung des Erwartungswertes $\langle w(t)w(t') \rangle$ wird die angegebene formale Lösung $w(t)$ der stochastischen Differentialgleichung eingesetzt und es wird dabei ausgenutzt, dass die Reihenfolge von Erwartungsbildung und Integration unerheblich ist (man unterscheide sorgfältig die Argumente t und t' von den Integrations-Laufvariablen t_1 und t_2):

$$\langle w(t)w(t') \rangle = \frac{2}{\bar{\tau}} \int_{t_1=-\infty}^t \int_{t_2=-\infty}^{t'} e^{-(t-t_1+t'-t_2)/\bar{\tau}} \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle dt_1 dt_2.$$